„When Nobody Else Dreamed of These Things“ — Axel Thue und die Termersetzung

Wolfgang Thomas

Termersetzungssysteme sind ein fundamentales Berechnungsmodell, das in vielen Bereichen der Informatik eingesetzt wird und u.a. die Grundlage für die Theorie der funktionalen Programmierung darstellt. Wer nach den Ursprüngen der Theorie der Termersetzungssysteme sucht, wird in der Regel auf Arbeiten verwiesen, die ab 1930 erschienen, etwa zur Begründung der kombinatorischen Logik durch Curry [5] oder zur Etablierung und Analyse des Lambda-Kalküls durch Church und Rosser [4, 6].

In dieser Notiz soll an eine weitgehend vergessene Arbeit erinnert werden, die viel früher, nämlich vor genau 100 Jahren, in der nicht besonders prominenten Schriftenreihe der Universität Oslo (damals Kristiania) erschien und die, so müssen wir heute feststellen, das eigentliche Gründungsdokument der Theorie der Termersetzung ist. Die Arbeit, in Deutsch geschrieben, ist so reich an originellen Ideen (und sie weist auch so prägnante Merkwürdigkeiten auf), dass sie zu ihrem „Jubiläum“ eine nähere Diskussion verdient.

Eine erste Besonderheit ist der nichtssagende Titel: *Die Lösung eines Spezialfalles eines generellen logischen Problems*. Abgesehen vom Attribut „logisch“ lässt sich eigentlich jeder wissenschaftliche Artikel so überschreiben. Es mag an diesem wenig einladenden Titel liegen, dass man die Arbeit Jahrzehnte lang übersehen hat.

Ihr Autor ist der norwegische Mathematiker Axel Thue (1863-1922). Er ist den Informatikern durch die Begriffe „Thue-System“ und „Semi-Thue-System“ bekannt. Auch in der Theorie der unendlichen Wörter erscheint sein Name; dort gibt es das „Thue-Morse-Wort“. Sein Hauptwerk liegt jedoch in der Zahlentheorie; hier hat er grundlegende Beiträge insbesondere zur Theorie der diophantischen Gleichungen und zur Approximation algebraischer Zahlen geleistet (u.a. dokumentiert im sog. „Thue-Siegel-Roth Theorem“). Seine wichtigsten Arbeiten sind in den *Selected Mathematical Papers of Axel Thue* [16] zusammengefasst, darunter auch alle Arbeiten, die heute als nah zur Informatik einzuordnen sind.

Im folgenden werden einige Kernideen der Arbeit *Die Lösung eines Spezialfalles eines generellen logischen Problems* vorgestellt. Für eine ausführlichere Diskussion sei auf [13] verwiesen.

Abbildung 1: Axel Thue

1 Bäume und das „generelle logische Problem"

Thue beginnt seine Arbeit mit einem Satz, der die Grundoperation des Zusammensetzens von Termen (mit zugehörigen Typen) zu einem neuen Term (mit einem neuen Typ) beschreibt. Thue sagt „Begriff" oder „Begriffskombination" statt „Term"; er nennt „Begriffskategorie", was man heute mit „Typ" bezeichnet:

> *Es kann eintreffen, dass man aus einem beliebigen Begriffe A einer Begriffskategorie P und aus einem beliebigen Begriffe B einer Begriffskategorie Q durch ein gewisses Verfahren oder Operation θ einen Begriff C einer Begriffskategorie R bilden kann.*

Dieses Verfahren kann man iterieren. Dann erhält man Terme, die sich – wie Thue sagt, „mit Rücksicht auf größere Übersicht" – als Bäume darstellen lassen. Thue gibt ein Beispiel mit einer Figur (siehe Abb. 2), die man als „den ersten Term-Baum der Informatik" ansehen kann – und die noch wirklich wie ein Baum aussieht.[1] Die Grundbegriffe (atomaren Terme) werden mit A, B, C, D, E bezeichnet; sie treten als Blätter auf. Die „Operationen" (Funktionen) werden durch a, b, c, d, e angedeutet, schließlich die „Begriffskategorien" (Typen) durch p und q.

Im Prinzip hat Thue hier die Idee der Typauswertung von Termen vorgezeichnet, in einer Form, die man heute durch endliche Baumautomaten realisiert:

[1] In der Graphentheorie hat sich der Begriff des Baumes schon vorher herausgebildet, u.a. durch Cayley; vgl. hierzu [2, 9].

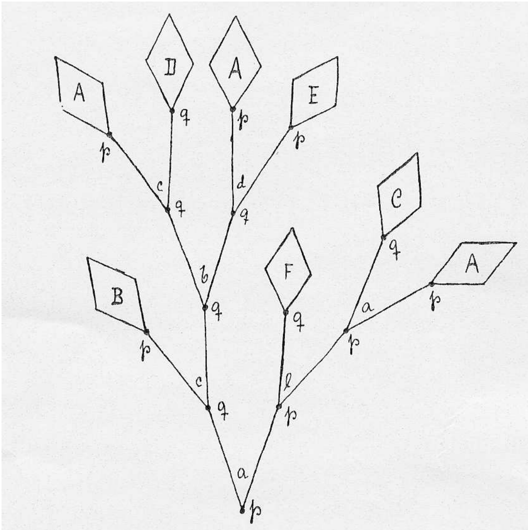

Abbildung 2: Ein Term als Baum

Ein Baumautomat wertet einen Baum (Term) von den Blättern her aus und berechnet als Zustand an jedem Knoten den Typ (hier p oder q) des entsprechenden Unterbaums. Die Figur ist in diesem Sinne auch die erste Darstellung des Laufs eines Baumautomaten, 50 Jahre bevor Baumautomaten explizit konzipiert wurden. Ist es ein Zufall, dass Thue als Zustände genau diejenigen Buchstaben $(p, q, \ldots)$ nimmt, die man auch heute in der Literatur zumeist verwendet?

In den ersten 20 Seiten, welche die *Abteilung A.* seiner Arbeit bilden, stellt Thue sein „generelles logisches Problem“ vor. Es hat nur noch indirekt mit der Frage der Typbestimmung zu tun. Thue formuliert das Fundamentalproblem der Termersetzung, für das sich heute die Bezeichnung „Wortproblem“ eingebürgert hat (vgl. etwa [1]). Ausgangspunkt sind für Thue „Axiome“ $T_1 = U_1, \ldots, T_n = U_n$, wobei T_i und U_i Bäume sind, deren Blattbeschriftungen als Variablen aufgefasst werden. Thue schreibt $A \sim B$, wenn der Baum A eine Instanz eines Baumes T_i enthält (mit gewissen Bäumen an Stelle der Variablen von T_i) und B aus A dadurch entsteht, dass man T_i durch die entsprechende Instanz von U_i ersetzt (also mit der gleichen Variablenbelegung wie bei T_i); auch die Anwendung mit Vertauschung von T_i und U_i ist erlaubt. Thue fragt nun für zwei vorgegebene Bäume A und B, „*ob man solche Bäume $C_1, C_2, \ldots, C_h$ finden kann, so dass $A \sim C_1 \sim C_2 \sim \ldots \sim C_h \sim B$*“, und er bezeichnet dann die Bäume A und B im Hinblick auf die Axiome als „gleich“.

Thue führt damit im Kern die Grundlagen der Gleichungslogik (oder der universellen Algebra) ein; seine Definition der Gleichheit von Termen auf der Basis gegebener „Axiome“ nimmt den heutigen Begriff der freien Termalgebra über einer Menge von Gleichungen voraus.

Thue benötigt mehrere Anläufe (insgesamt vier Fassungen), bis er zu einer endgültigen Formulierung des Problems gelangt. Ein Grund dafür ist die nur implizit vorgenommene Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen; auch steht Thue nicht die Unterscheidung zwischen der syntaktischen und der semantischen Äquivalenz von Termen zur Verfügung (die ja nach dem Satz von Birkhoff übereinstimmen). Doch ist schließlich eine unmissverständliche Formulierung des zentralen Problems der Theorie der Termersetzung erreicht.

2 „Unüberwindliche Schwierigkeiten“

Wir wissen heute, dass Thues Problem unentscheidbar, also nicht algorithmisch lösbar ist. Als Thue seine Arbeit schrieb, wurde die Möglichkeit, dass ein Problem von dieser Art sein könne, in der mathematischen Grundlagenforschung noch nicht ernsthaft in Erwägung gezogen. Zum Beispiel formulierte Hilbert im Jahre 1900 sein „10. Hilbertsches Problem“ [7] knapp als die Aufforderung, einen Algorithmus zu finden:

> *Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sei gegeben: Man soll ein Verfahren finden, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.*

Hilbert erwartete nicht eine Lösung, wie sie 70 Jahre später durch Y. Matiyasevich gegeben wurde (siehe [11]), nämlich dass ein derartiges Verfahren gar nicht existieren kann.

Thue ist in seiner Arbeit vorsichtiger als Hilbert. Er kommt zu einer bemerkenswerten Feststellung, die sich von der Vorstellung löst, dass man nur „ein Verfahren finden“ müsse:

> *Eine Lösung dieser Aufgabe im allgemeinsten Falle dürfte vielleicht mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden sein.*

Heute kann man dies als prophetische Aussage deuten. Doch ob Thue damit wirklich meinte, dass ein Problem algorithmisch unlösbar sein kann (wie dies zwanzig Jahre später durch Church und Turing formuliert wurde), muss man wohl offen lassen.

Thue zog die Konsequenz, die im Titel seiner Arbeit angekündigt ist: Er beschränkte sich auf einen Spezialfall. Dieser betraf eine besondere (und künstliche) Form von Axiomen, aus der sich eine Schranke für die Länge h von wiederholungsfreien „Ableitungen“ $A \sim C_1 \sim C_2 \sim \ldots \sim C_h \sim B$ folgern lässt. Der längere Teil der Arbeit (*Abteilung B.*) befasst sich damit; wir gehen darauf nicht näher ein, da die Beiträge hier recht technisch sind (für ausführlichere Erläuterungen vgl. [13]). Doch finden sich in der vorbereitenden Diskussion mehrere originelle Begriffe und Ansätze, die heute zum Kernbestand der Theorie der Termersetzungssysteme zählen:

- die Idee der gerichteten Ersetzungsregeln,
- die Einführung von Parametern (in Form natürlicher Zahlen), die bei Anwendung von Regeln monoton fallen und damit die Termination der Anwendung der Ersetzungsschritte garantieren,
- die Eindeutigkeit irreduzibler Terme und (wie man heute sagt) die „Church-Rosser-Eigenschaft“ von Termersetzungssystemen,
- und schließlich sogar eine Andeutung der Idee der „kritischen Paare“, die später (und unabhängig von Thue) Knuth und Bendix [8] vorgeschlagen und analysiert haben.

Thue hat also auf wenigen Seiten eine ganze Reihe von methodischen Ansätzen vorgestellt, die erst eine oder zwei Generationen später neu erfunden und ausgestaltet wurden.

3 Folgearbeiten

Nach der Publikation gab es in den nächsten Jahren, nach Kenntnis des Verfassers sogar in den nächsten Jahrzehnten, nur ein einziges Zitat der Thue'schen Arbeit von 1910, und zwar durch Thue selbst: Im Jahre 1914 erschien, wieder in der Schriftenreihe der Universität Oslo (Kristiania), die Arbeit *Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln* [15]. Thue nimmt hier das Problem von 1910 auf und formuliert es nun für Wörter und Wortersetzungsregeln. Dies entspricht der Einschränkung des ursprünglichen Problems auf den Fall unärer Bäume (Terme). Die Aufgabe lässt sich viel einfacher formulieren und ist dann eher ein kombinatorisches als ein logisches Problem.

Thue gibt die Regeln in Form zweier Wortlisten A und B gleicher Länge vor; hierbei sind die Wörter in A die linken Seiten der Ersetzungsregeln und die Wörter in B die rechten Seiten. Er stellt die Aufgabe, „bei beliebiger Wahl der gegebenen Zeichenreihen A und B eine Methode zu finden, durch welche man nach einer berechenbaren Anzahl von Operationen immer entscheiden kann, ob zwei beliebige Zeichenreihen in Bezug auf die Reihen A und B äquivalent sind oder nicht.“

Es ist interessant, dass hier nur die Aufforderung formuliert wird, „eine Methode zu finden“; die „unüberwindlichen Schwierigkeiten“ der Arbeit von 1910 werden nicht mehr erwähnt. Doch werden auch in der neuen Arbeit nur Spezialfälle gelöst; das Problem für allgemeine Wortersetzungssysteme bleibt offen.

Diese Arbeit von 1914 wurde auch von anderen wahrgenommen. Sie war Alonzo Church bekannt, und dieser wies Emil Post darauf hin. Post zeigte 1947 die Unentscheidbarkeit des Thue'schen Problems für Wortersetzungssysteme in seinem Artikel *Undecidability of a Problem of Thue* [12]. In diesem Zusammenhang wurden die Begriffe „Thue-System" (mit der Anwendung von Wortersetzungsregeln in beiden Richtungen) und „Semi-Thue-System" (mit gerichteten Wortersetzungsregeln) geprägt.

Eine weitere Spezialisierung des Problems wurde anschließend in der kombinatorischen Gruppentheorie studiert, ausgehend von der Beobachtung, dass in einer Gruppe mit den Erzeugenden $a_1, ..., a_n$ (und den zugehörigen inversen Elementen $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$) jedes Gruppenelement durch ein Wort über dem Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}\}$ darstellbar ist. Eine Gruppe über diesen Erzeugenden ist dann spezifiziert durch eine Wortrelation R, in der Wortpaare (u, v) enthalten sind, so dass u und v dasselbe Gruppenelement darstellen. (Häufig nimmt man stattdessen auch die Liste der entsprechenden Wörter uv^{-1} als Darstellungen des Neutralelements.) Das *Wortproblem der Gruppentheorie* fragt nach einem Algorithmus, der zu endlichem Alphabet $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ und endlicher Relation R sowie zwei Wörtern w_1 und w_2 entscheidet, ob w_1 und w_2 das gleiche Gruppenelement der durch A und R spezifizierten Gruppe bezeichnen. Dieses Problem wurde durch Novikov und durch Boone als unentscheidbar nachgewiesen (siehe etwa [10]).

Die Bezeichnung „Wortproblem" hat sich dann durchgesetzt. Es ist merkwürdig, dass man davon nun auch in der Theorie der Termersetzung spricht. Das „Wortproblem für Termersetzungssysteme" ist genau Thues Problem von 1910. Die sachlich nicht ganz korrekte Bezeichnung als „Wortproblem" geht auf die Problemstellung der Folgearbeit von 1914 zurück, die nur Wortersetzungssysteme betrifft und die – anders als die Arbeit von 1910 – wirklich zur Kenntnis genommen wurde. Die Kopie nahm man wahr, das Original nicht.

4 Anerkennung?

Viele Jahrzehnte dauerte es, bis Thues Arbeit *Die Lösung eines Spezialfalles eines generellen logischen Problems* zu Ehren kam. Es war schließlich J.R. Büchi, der ihr den richtigen Platz zuwies. Büchi erwähnt Thue an mehreren Stellen seiner Monographie *Finite Automata, Their Algebras and Grammars* [3] (die fünf Jahre nach dem Tode Büchis durch D. Siefkes herausgegeben wurde). Im *Acknowledgment* spricht Büchi über Thue als jemanden *„who thought about grammars and even trees and who has done so many other original things when nobody else dreamed of these things"*; und auf S. 220 des Buches findet sich auch eine Würdigung der Arbeit von 1910.

Thues Arbeit ist ein Musterbeispiel dafür, wie weit die Zitationsrate und die bahnbrechende Originalität eines wissenschaftlichen Artikels auseinanderklaffen können. Thues Arbeit war offensichtlich ihrer Zeit weit voraus, und sie wurde – wohl auch aufgrund ihres inhaltslosen Titels – nicht wahrgenommen. Und so fällt sie nach allen gängigen Maßstäben der Bibliometrie in die Kategorie „bedeutungslos“. Die Historie gibt dieser Einschätzung in gewissem Sinne auch recht, denn die Theorie der Termersetzung hat sich ja unabhängig von Thues Arbeit entwickelt. Dennoch wird jeder, der wissenschaftliche Originalität und Substanz zu schätzen weiß, Thues Arbeit von 1910 zu den besten Juwelen der Wissenschaft zählen.

Literatur

[1] F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge 1998.

[2] N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford 1976.

[3] J.R. Büchi, *Finite Automata, Their Algebras and Grammars* (Hrsg. D. Siefkes), Springer-Verlag, New York 1989.

[4] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. J. Math.* 58 (1936), 345-363.

[5] H.B. Curry, Grundzüge der kombinatorischen Logik, *Amer. J. Math* 52 (1930), 509-536.

[6] A. Church, J.B. Rosser, Some properties of conversion, *Trans. Amer. Math. Soc.* 39 (1936), 472-482.

[7] D. Hilbert, Mathematische Probleme, *Arch. der Math. und Phys.* 1 (1901), pp. 44-63, 213-237.

[8] D.E. Knuth, P.B. Bendix, Simple word problems in universal algebra, in: J. Leech (Hrsg.), *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamon Press, London 1970, pp. 263-297.

[9] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Chelsea Publ. Comp., New York 1950.

[10] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[11] Y. Matiyasevich, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press, Cambridge, Mass. 1993.

[12] E.L. Post, Recursive unsolvability of a problem of Thue, *J. Symb. Logic* 12 (1), 1-11, Nachdruck in: M. Davis (Hrsg.), *The Collected Works of Emil L. Post*, Birkhäuser, Boston 1994, pp. 503-513.

[13] M. Steinby, W. Thomas, Trees and term rewriting in 1910: On a paper by Axel Thue, in: *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 72 (2000), 256-269.

[14] A. Thue, Die Lösung eines Spezialfalles eines generellen logischen Problems, *Kra. Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Mat. Nat. Kl. 1910, No. 8*, Kristiania 1910. Nachdruck in [16], pp. 273-310.

[15] A. Thue, Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln, *Kra. Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Mat. Nat. Kl. 1914, No. 10*, Kristiania 1914. Nachdruck in [16], pp. 493-524.

[16] T. Nagel, A. Selberg, S. Selberg and K. Thalberg (eds.), *Selected Mathematical Papers of Axel Thue*. Universitetsforlaget, Oslo 1977.